TRƯỜNG ĐẠI HỌC
BÁCH KHOA HÀ NỘI
HANOI UNIVERSITY
OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

§8: KHÔNG GIAN VECTO

Pham Thanh Tung-3I-SEE-K64

ONE LOVE. ONE FUTURE.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Bài giảng Đại số tuyến tính, thầy Bùi Xuân Diệu

[2] "Toán cao cấp" tập một - GS.TS Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), PGS.TS Trần Việt Dũng, PGS.TS Nguyễn Xuân Thảo, PGS.TS Trần Xuân Hiển.

[3] "Bài tập Toán cao cấp" tập một - GS.TS Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), PGS.TS Trần Việt Dũng, PGS.TS Nguyễn Xuân Thảo, PGS.TS Trần Xuân Hiển.

[4] Sách "Giúp ôn tập tốt Toán Cao Cấp: Đại số tuyến tính", thầy Tống Đình Quỳ, thầy Nguyễn Cảnh Lương.

[5] "Phương pháp giải bài tập toán cao cấp", tập 1, Bài tập Đại số, thầy Nguyễn Cảnh Lương, thầy Nguyễn Văn Nghị

[6] "Bài tập Toán cao cấp" tập một - GS.TS Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), Tạ Văn Đinh, Nguyễn Hồ Quỳnh

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[7] Bộ đề thi môn Đại số tuyến tính các năm Trường ĐH Bách Khoa HN.

[8] Đề cương môn Đại số tuyến tính Trường ĐH Bách Khoa Hà Nội.

KỸ NĂNG CẦN NẮM VỮNG

- Biến đổi ma trận bậc thang
- Biện luận hạng của ma trận
- Biện luận số nghiệm của hệ phương trình
- Tính định thức

KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

I. Không gian vecto
II. Không gian vecto con
III. Hệ sinh của một không gian vecto
IV. Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính
V. Cơ sở và số chiều của không gian vecto
VI. Tọa độ
VII. Bài toán tìm số chiều và một cơ sở của không gian vecto con
VIII. Bài toán đổi cơ sở

I. Không gian vecto:

Định nghĩa: Tập hợp $V \neq \emptyset$ được gọi là một không gian vecto nếu nó được quy định hai phép toán cộng vecto và nhân vô hướng thỏa mãn các điều kiện sau:

➢ ***Tính đóng kín:*** Giả sử $\forall a, b \in V$ thì $\begin{cases} a + b \in V \\ k.a \in V \ (k \in R) \end{cases}$

➢ ***Phép cộng thỏa mãn:***

Với $a, b, c \in V$

- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $a + b = b + a$
- $\exists 0 \in V: 0 + a = a$
- $\forall a \in V, \exists a' \in V: a + a' = 0$

➢ ***Phép nhân vô hướng thỏa mãn:***

Với $k, k' \in R$

- $k.(a + b) = ka + kb$
- $(k + k')a = ka + k'a$
- $k.(k'a) = (k.k').a$
- $1.a = a \ (\forall a \in V)$

Bài tập 1: Tập $V = \{(x, y, z)|x, y, z \in R\}$ với các phép toán kèm theo có là KGVT hay không?

$$\begin{cases} (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \\ k(x, y, z) = (|k|x, |k|y, |k|z) \quad (k \in R) \end{cases}$$

Bài tập 2: Tập $V = \{(x_1, x_2)|\ x_1 > 0; x_2 > 0\}$ với các phép toán kèm theo có là KGVT hay không?

$$\begin{cases} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_2) \\ k(x_1, x_2) = \left({x_1}^k, {x_2}^k\right) (k \in R) \end{cases}$$

Bài tập 1:

<u>**Giải**</u>

Kiểm tra phép nhân: Giả sử $(x, y, z) \in V; k, k' \in R$

$$(k + k').(x, y, z) = (|k + k'|x, |k + k'|y, |k + k'|z)$$

> ***Phép nhân vô hướng***
> - $k.(a + b) = ka + kb$
> - $(k + k')a = ka + k'a$
> - $k.(k'a) = (k.k').a$
> - $1.a = a\ (\forall a \in V)$

$$k.(x, y, z) + k'.(x, y, z) = (|k|x, |k|y, |k|z) + (|k'|x, |k'|y, |k'|z)$$

$$= \big((|k| + |k'|)x, (|k| + |k'|)y, (|k| + |k'|)z\big)$$

$\Rightarrow$ $(k + k').(x, y, z) \neq k.(x, y, z) + k'.(x, y, z)$ (Do $|k + k'| \neq |k| + |k'|$)

$\Rightarrow$ Tập V cùng các phép toán đã cho không tạo thành KGVT

I. Không gian vecto:

➢ Một số không gian vecto thường gặp:

- Tích Đề-Các:

$$\boxed{R^n = \{(x_1, x_2, .., x_n) \mid x_1, x_2, .., x_n \in R\}}$$

- Tập hợp các đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n

$$\boxed{P_n[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n | a_0, a_1, \dots, a_n \in R\}}$$

- Tập hợp các ma trận cỡ $m \times n$: $M_{m\times n}$

- Tập hợp các ma trận vuông cấp n: M_n

II. Không gian vecto con:

- ***Định nghĩa:***

Với $\forall a, b \in W; k \in R$, W là KGVT con của V xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} W \subset V, W \neq \emptyset \text{ (Tập hợp)} \\ a + b \in W \\ ka \in W \end{cases}$$

Bài tập 1: Chứng minh tập hợp $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in R \right\}$ với phép cộng ma trận và nhân ma trận với một số thực là một không gian vecto con của không gian M_2 (không gian vecto các ma trận vuông cấp hai)

Giải:

1. $\boxed{G \subset M_2, G \neq 0}$

2. Giả sử $\forall\, A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{bmatrix} \in G$ với $a, b, c, a', b', c' \in R$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + a' & b + b' \\ b + b' & c + c' \end{bmatrix} \\ a + a', b + b', c + c' \in R \end{cases} \Rightarrow \boxed{A + B \in G}$$

3. Giả sử với $k \in R$

$$\begin{cases} k.\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kb & kc \end{bmatrix} \\ ka, kb, kc \in R \end{cases} \Rightarrow \boxed{k.A \in G}$$

Đpcm

Bài tập 2: Cho tập hợp $H = \left\{ (x,y,z) \in R^3 \middle| \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x + 5y - z = 0 \\ 4x - y - z = 0 \end{cases} \right\}$. Chứng minh rằng H là KGVT con của R^3.

Bài tập 3: Cho tập V_1, V_2 là hai KGVT con của KGVT V. Chứng minh:

1) $V_1 \cap V_2$ là một KGVT con của V.

2) Cho $V_1 + V_2 = \{x_1 + x_2 | x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}$. Chứng minh $V_1 + V_2$ là KGVT con của V.

III. Hệ sinh của một không gian vecto:

- ***Định nghĩa:*** Cho V là một không gian vecto và $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ là một họ các vecto thuộc V. Nếu mọi vecto $u \in V$ đều có thể biểu diễn được dưới dạng tổ hợp tuyến tính của $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ nghĩa là $\exists\, m_1, m_2, .., m_n \in R$ sao cho $u = m_1v_1 + m_2v_1 + \cdots + m_nv_n$ thì ta nói S là hệ sinh ra V.

- ***Kí hiệu:*** $V = span\{S\}$

III. Hệ sinh của một không gian vecto:

Dạng bài tập 1 (Bài toán xuôi): Kiểm tra hệ sinh của một KGVT.

➢ ***Bài toán:*** Cho $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ với $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$

→ Kiểm tra xem S có là hệ sinh của KGVT V hay không?

➢ ***Phương pháp giải:***

- ***B1:*** Giả sử $\forall v \in V$, xét quan hệ tuyến tính

$$\boxed{v = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots + m_n v_n} \quad (*)$$

- ***B2:*** Biện luận

Nếu hệ $(*)$ có nghiệm → $V = span\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

III. Hệ sinh của một không gian vecto:

Bài tập 1: Xét xem hệ $S = \{v_1 = (2,3,-1), v_2 = (3,-1,5), v_3 = (-1,3,-4)\}$ có là hệ sinh của R^3 không?

Giải:

Với $\forall u = (a, b, c) \in R^3$, để S là hệ sinh của R^3

$\Leftrightarrow \exists m_1, m_2, m_3 \in R$ sao cho $u = m_1v_1 + m_2v_2 + m_3v_3$

$\Leftrightarrow \exists m_1, m_2, m_3 \in R: m_1(2,3,-1) + m_2(3,-1,5) + m_3(-1,3,-4) = (a, b, c)$

$\Leftrightarrow$ Hệ $\begin{cases} 2m_1 + 3m_2 - m_3 = a \\ 3m_1 - m_2 + 3m_3 = b \\ -m_1 + 5m_2 - 4m_3 = c \end{cases}$ $(*)$ có nghiệm với $\forall a, b, c \in R$

Bài tập 1: Xét xem hệ $S = \{v_1 = (2,3,-1), v_2 = (3,-1,5), v_3 = (-1,3,-4)\}$ có là hệ sinh của R^3 không?

<u>Giải:</u> (Tiếp)

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -4 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \Rightarrow$ Hệ có nghiệm duy nhất (Cramer)

Vậy S là hệ sinh của R^3.

Bài tập 2: Hỏi $S = \{u_1 = -1 + 2x + x^2; u_2 = -3 + 3x + x^2; u_3 = -2 + 2x\}$ có là hệ sinh của $P_2[x]$ không?

<u>Giải:</u>

Với $\forall u = a + bx + cx^2 \in P_2[x],\ S$ là hệ sinh của $P_2[x]$

$\Leftrightarrow \exists\, m_1, m_2, m_3 \in R$ để $u = m_1u_1 + m_2u_2 + m_3u_3$

$\Leftrightarrow \exists\, m_1, m_2, m_3 \in R$ để

$$a + bx + cx^2 = m_1(-1 + 2x + x^2) + m_2(-3 + 3x + x^2) + m_3(-2 + 2x)$$

$\Leftrightarrow$ Hệ $\begin{cases} -m_1 - 3m_2 - 2m_3 = a \\ 2m_1 + 3m_2 + 2m_3 = b \\ m_1 + m_2 = c \end{cases}$ $(*)$ có nghiệm với $\forall a, b, c \in R$

Bài tập 2: Hỏi $S = \{u_1 = -1 + 2x + x^2; u_2 = -3 + 3x + x^2; u_3 = -2 + 2x\}$ có là hệ sinh của $P_2[x]$ không?

Giải: (Tiếp)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{Hệ } (*) \text{ có nghiệm duy nhất}$$

Vậy S là hệ sinh của $P_2[x]$

Bài tập 3: Hỏi $S = \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, u_4 = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ có phải hệ sinh của M_2 không?

Giải:

Hệ S không phải là hệ sinh của M_2

III. Hệ sinh của một không gian vecto:

Dạng bài tập 2 (Bài toán ngược): Tìm điều kiện để $v \in span\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

➢ ***Bài toán:*** Cho $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ với $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ và $v = v(m) \in V$

→ Tìm điều kiện của m để $v \in span\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

➢ ***Phương pháp giải:***

- ***B1:*** Xét quan hệ tuyến tính

$$\boxed{v(m) = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots + m_n v_n} \quad (*)$$

- ***B2:*** $v \in span\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \Leftrightarrow \exists m_1, m_2, \dots, m_n \in R$ thỏa mãn $(*)$

→ Biện luận điều kiện của m để hệ $(*)$ có nghiệm.

Bài tập 1: Trong R^4 cho các vecto $v_1 = (1,1,-2,3), v_2 = (2,3,1,1)$, $v_3 = (2,-1,0,1), v = (1,5,-1,m)$. Tìm m để v thuộc $span\{v_1, v_2, v_3\}$

Giải:

$v \in span\{v_1, v_2, v_3\} \Leftrightarrow \exists m_1, m_2, m_3 \in R$ để $v = m_1v_1 + m_2v_2 + m_3v_3$

$\Leftrightarrow$ Hệ $\begin{cases} m_1 + 2m_2 + 2m_3 = 1 \\ m_1 + 3m_2 - m_3 = 5 \\ -2m_1 + m_2 = -1 \\ 3m_1 + m_2 + m_3 = m \end{cases}$ $(*)$ có nghiệm

Bài tập 1: Trong R^4 cho các vecto $v_1 = (1,1,-2,3), v_2 = (2,3,1,1)$, $v_3 = (2,-1,0,1), v = (1,5,-1,m)$. Tìm m để v thuộc $span\{v_1, v_2, v_3\}$

Giải: **(Tiếp)**

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & m \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & m-3 \end{array}\right)$$

Hệ $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) \Leftrightarrow m = 3$

Vậy với $m = 3$ thì $v \in span\{v_1, v_2, v_3\}$

III. Hệ sinh của một không gian vecto:

Bài tập 2: Trong $P_2[x]$ cho các vecto $v_1 = 2 + 3x + 5x^2, v_2 = 3 + 7x + 8x^2,$ $v_3 = 1 - 6x + x^2, v = 7 - 2x + mx^2$. Tìm m để v thuộc $span\{v_1, v_2, v_3\}$

Đáp số: $m = 15$

Bài tập 3: Trong M_2 cho các vecto

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Tìm m để $v_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -7 & m \end{bmatrix} \in span\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

Đáp số: $\forall m \in R$

IV. Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính:

- Cho hệ vecto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, xét ràng buộc tuyến tính

$$\boxed{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots a_n v_n = \theta} \quad (*)$$

- ➢ Hệ S là độc lập tuyến tính ⇔ $(*)$ có nghiệm tầm thường
- ➢ Hệ S là phụ thuộc tuyến tính ⇔ $(*)$ có nghiệm không tầm thường

IV. Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính:

Dạng bài tập 2: Kiểm tra sự độc lập tuyến tính của một hệ vecto

➢ ***Bài toán:*** Cho hệ vecto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

→ Hệ S độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

➢ ***Phương pháp giải:***

- ***B1:*** Xét ràng buộc tuyến tính

$$\boxed{m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots + m_n = \theta} \quad (*)$$

- ***B2:*** Biện luận:

Hệ $(*)$ có nghiệm tầm thường $\Rightarrow S$ độc lập tuyến tính

Hệ $(*)$ có nghiệm không tầm thường $\Rightarrow S$ phụ thuộc tuyến tính

Bài tập 1: Trong R^3, hệ $\{v_1 = (1, -3, 2), v_2 = (3, -4, 1), v_3 = (2, -5, 3)\}$ có độc lập tuyến tính hay không?

<u>**Giải:**</u>

Xét ràng buộc tuyến tính

$$a_1(1, -3, 2) + a_2(3, -4, 1) + a_3(2, -5, 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 3a_2 + 2a_3 = 0 \\ -3a_1 - 4a_2 - 5a_3 = 0 \\ 2a_1 + a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Hệ có nghiệm không tầm thường}$$

$\Rightarrow$ Hệ vecto $\{v_1, v_2, v_3\}$ phụ thuộc tuyến tính

IV. Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính:

Bài tập 1: Trong R^3, hệ $\{v_1 = (1,-3,2), v_2 = (3,-4,1), v_3 = (2,-5,3)\}$ có độc lập tuyến tính hay không?

Giải:

Cách 2: Biện luận theo Gauss

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3 \Rightarrow$ Hệ có nghiệm không tầm thường.

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ phụ thuộc tuyến tính.

IV. Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính:

Bài tập 2: Trong $P_2[x]$, xét sự độc lập tuyến tính của hệ vecto $\{v_1 = 1 + x, v_2 = 2 - x + 3x^2, v_3 = 1 + 4x - 3x^2\}$

<u>Giải:</u>

Xét ràng buộc tuyến tính: $a(1 + x) + b(2 - x + 3x^2) + c(1 + 4x - 3x^2) = 0$

$$\Leftrightarrow (a + 2b + c) + (a - b + 4c)x + (3b - 3c)x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ a - b + 4c = 0 \\ 3b - 3c = 0 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Hệ có nghiệm không tầm thường}$$

$\Rightarrow$ Hệ vecto $\{v_1, v_2, v_3\}$ phụ thuộc tuyến tính

Bài tập 2: Trong $P_2[x]$, xét sự độc lập tuyến tính của hệ vecto $\{v_1 = 1 + x, v_2 = 2 - x + 3x^2, v_3 = 1 + 4x - 3x^2\}$

<u>Giải:</u> (Tiếp)

Cách 2: *Biện luận theo Gauss*

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3 \Rightarrow$ Hệ có nghiệm không tầm thường

$\Rightarrow$ Hệ vecto $\{v_1, v_2, v_3\}$ phụ thuộc tuyến tính tuyến tính.

IV. Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính:

Dạng bài tập 4: Tìm điều kiện để hệ vecto độc lập/phụ thuộc tuyến tính

➢ Bài toán: Cho hệ $S = \{v_1(m), v_2(m), \dots, v_n(m)\}$

→ Tìm điều kiện của tham số m để S độc lập/phụ thuộc tuyến tính.

➢ ***Phương pháp giải:***

- ***B1:*** Xét ràng buộc tuyến tính

$$\boxed{m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots + m_n = \theta} \quad (*)$$

- ***B2:*** Biện luận

Hệ S độc lập tuyến tính → Tìm m để $(*)$ có nghiệm tầm thường

Hệ S phụ thuộc tuyến tính → Tìm m để $(*)$ có nghiệm không tầm thường

Bài tập 1: Trong R^4, cho $u_1 = (1; 1; -2; 3), u_2 = (2; 3; 1; 1), u_3 = (2; -1; 0; 1)$, $u_4 = (1; 5; -1; m)$. Tìm m để $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ độc lập tuyến tính.

Giải:

Xét ràng buộc tuyến tính

$$au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 2c + d = 0 \\ a + 3b - c + 5d = 0 \\ -2a + b - d = 0 \\ 3a + b + c + md = 0 \end{cases}$$

Để $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow$ Hệ có nghiệm tầm thường.

IV. Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính:

Bài tập 1: Trong R^4, cho $u_1 = (1;1;-2;3), u_2 = (2;3;1;1), u_3 = (2;-1;0;1)$, $u_4 = (1;5;-1;m)$. Tìm m để $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ độc lập tuyến tính.

<u>Giải:</u> (Tiếp)

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & m \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & m-3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{m \neq 3}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 19 & -19 \\ 0 & 0 & -20 & m+17 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & m-3 \end{bmatrix}$$

Bài tập 2: Trong M_2, cho các vecto

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, u_4 = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & m \end{bmatrix}.$$

Tìm m để hệ $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ phụ thuộc tuyến tính.

Giải:

Đáp số: Với $\forall m \in R$ thì hệ $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ phụ thuộc tuyến tính.

1. Cơ sở của một không gian vecto:

- Cho KGVT V và hệ vecto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_3\}$ với $v_1, v_2, \dots, v_3 \in V$

$$S \text{ là một cơ sở của } V \Leftrightarrow \begin{cases} V = span\{S\} \\ \text{Hệ } S \text{ độc lập tuyến tính} \end{cases}$$

- KGVT V có thể có nhiều cơ sở và số vecto trong các cơ sở đó bằng nhau

Ví dụ: Xét xem hệ $\{v_1 = 1, v_2 = -1 + x, v_3 = 1 + 2x + x^2\}$ có phải cơ sở của $P_2[x]$ không?

<u>Giải:</u>

1. Chứng minh hệ sinh:

Giả sử $\forall (a + bx + cx^2) \in P_2[x]$, xét $a + bx + cx^2 = mv_1 + nv_2 + pv_3$

$$\Leftrightarrow a + bx + cx^2 = m.1 + n(-1 + x) + p(1 + 2x + x^2) \Leftrightarrow \begin{cases} m - n + p = a \\ n + 2p = b \\ p = c \end{cases}$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right) \Rightarrow r(A) = r(\bar{A}) \Rightarrow \text{Hệ có nghiệm duy nhất}$$

Ví dụ: Xét xem hệ $\{v_1 = 1, v_2 = -1 + x, v_3 = 1 + 2x + x^2\}$ có phải cơ sở của $P_2[x]$ không?

Giải:

2. Chứng minh độc lập tuyến tính:

Xét ràng buộc tuyến tính

$$mv_1 + nv_2 + pv_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m - n + p = 0 \\ n + 2p = 0 \\ p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = 0 \\ p = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$ độc lập tuyến tính

Vậy $\{v_1 = 1, v_2 = -1 + x, v_3 = 1 + 2x + x^2\}$ là một cơ sở của $P_2[x]$

2. Số chiều của một không gian vecto:

- Số chiều của không gian vecto V chính bằng số phần tử trong một cơ sở bất kì của nó.
- Kí hiệu là: $\dim V$.
- Số chiều của một số không gian hay gặp:

$$\dim(R^n) = n, \dim(P_n[x]) = n + 1, \dim(M_n) = n^2$$

- ***Định lý:*** Nếu hệ vecto S có số vecto bằng số chiều của KGVT V thì S là cơ sở của V khi S độc lập tuyến tính

Ví dụ: Trong không gian $P_2[x]$, cho các vecto $u_1 = 1 + 2x - x^2, u_2 = 1 + x$, $u_3 = 2 + 3x - 2x^2$. Chứng minh hệ $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ là 1 cơ sở của $P_2[x]$.

Giải:

Hệ S có số vecto là $3 = \dim(P_2[x])$

$\Rightarrow S$ là cơ sở của $P_2[x]$ khi S độc lập tuyến tính

Xét ràng buộc tuyến tính: $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$

$\Leftrightarrow a(1 + 2x - x^2) + b(1 + x) + c(2 + 3x - 2x^2) = 0$

$$\Leftrightarrow (a + b + 2c) + (2a + b + 3c)x + (-a - 2c)x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ 2a + b + 3c = 0 \\ -a - 2c = 0 \end{cases}$$

Ví dụ: Trong không gian $P_2[x]$, cho các vecto $u_1 = 1 + 2x - x^2, u_2 = 1 + x$, $u_3 = 2 + 3x - 2x^2$. Chứng minh hệ $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ là 1 cơ sở của $P_2[x]$.

Giải:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow r(A) = r(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ Hệ có nghiệm tầm thường $\Rightarrow$ Hệ S độc lập tuyến tính

$\Rightarrow S = \{u_1, u_2, u_3\}$ là 1 cơ sở của $P_2[x]$.

Ví dụ: Trong không gian $P_2[x]$, cho các vecto $u_1 = 1 + 2x - x^2, u_2 = 1 + x$, $u_3 = 2 + 3x - 2x^2$. Chứng minh hệ $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ là 1 cơ sở của $P_2[x]$.

Giải: ***Cách 2:***

Trong ***Cách 1*** điều kiện để hệ độc lập tuyến tính hay S là 1 cơ sở của $P_2[x]$

chính là $r\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = 3$

$$r\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = 3 \Leftrightarrow r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}\right) = 3$$

Ví dụ: Trong không gian $P_2[x]$, cho các vecto $u_1 = 1 + 2x - x^2, u_2 = 1 + x$, $u_3 = 2 + 3x - 2x^2$. Chứng minh hệ $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ là 1 cơ sở của $P_2[x]$.

Giải: ***Cách 2:***

B1: Kiểm tra điều kiện $\dim V =$ Số vecto trong hệ S.

B2: Lập A là ma trận tọa độ theo hàng của các vecto có trong hệ S.

- $r(A) =$ Số vecto trong $S \Rightarrow S$ độc lập tuyến tính $\Rightarrow S$ là cơ sở của KGVT V
- $r(A) \neq$ Số vecto trong $S \Rightarrow S$ phụ thuộc tuyến tính

$\Rightarrow S$ không là cơ sở của KGVT V.

Ví dụ: Trong không gian $P_2[x]$, cho các vecto $u_1 = 1 + 2x - x^2, u_2 = 1 + x$, $u_3 = 2 + 3x - 2x^2$. Chứng minh hệ $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ là 1 cơ sở của $P_2[x]$.

Giải: ***Cách 2:***

S có số vecto là $3 = \dim(P_2[x])$

$\Rightarrow S$ là cơ sở của $P_2[x]$ khi S độc lập tuyến tính

Lập A là ma trận tọa độ theo hàng của u_1, u_2, u_3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow r(A) = r(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ Hệ S độc lập tuyến tính $\Rightarrow$ Hệ S là cơ sở của $P_2[x]$.

V. Cơ sở và số chiều của không gian vecto

Dạng bài tập 5: Kiểm tra một cơ sở của KGVT V

➢ ***Bài toán:*** Cho KGVT V và hệ $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ với $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$

→ Kiểm tra S có phải là một cơ sở của V hay không?

➢ ***Phương pháp giải:***

B1: Kiểm tra điều kiện $\dim V = $ Số vecto trong hệ S.

B2: Lập A là ma trận tọa độ theo hàng của các vecto có trong hệ S.

$r(A) =$ Số vecto trong $S \Rightarrow S$ độc lập tuyến tính $\Rightarrow S$ là cơ sở của KGVT V

$r(A) \neq$ Số vecto trong $S \Rightarrow S$ phụ thuộc tuyến tính $\Rightarrow S$ không là cơ sở của V.

Ví dụ: Trong không gian R^3, cho các vecto $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,2)$, $v_3 = (1,2,3)$. $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ có là 1 cơ sở của $P_2[x]$ không?

Giải:

Hệ $S = \{v_{1,} v_2, v_3\}$ có số vecto là $3 = \dim(R^3)$

$\Rightarrow S$ là cơ sở của $P_2[x]$ khi S độc lập tuyến tính

Lập A là ma trận tọa độ theo hàng của v_1, v_2, v_3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow r(A) = r(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ Hệ S độc lập tuyến tính $\Rightarrow$ Hệ S là cơ sở của $P_2[x]$.

Dạng bài tập 6: Tìm điều kiện để hệ S là một cơ sở của KGVT V

➢ ***Bài toán:*** Cho KGVT V và hệ $S = \{v_1(m), v_2(m), \dots, v_n(m)\}$

→ Tìm điều kiên của m để hệ S là một cơ sở của KGVT V

➢ ***Phương pháp giải:***

B1: Kiểm tra điều kiện $\dim V =$ Số vecto trong hệ S. Nếu thỏa mãn sang ***B2***

B2: Lâp A là ma trận tọa độ theo hàng của các vecto có trong hệ S.

- S là cơ sở của KGVT V → Tìm m để $r(A) =$ Số vecto trong S
- S không là cơ sở của KGVT V → Tìm m để $r(A) \neq$ Số vecto trong S

Bài tập 1: Trong không gian $P_2[x]$, cho hệ

$$S = \{v_1 = -1 + x^2, v_2 = 1 + x + x^2, v_3 = -3 - mx + x^2\}$$

Tìm m để S là một cơ sở của $P_2[x]$.

Giải:

Hệ S có số vecto là $3 = \dim(P_2[x])$

$\Rightarrow S$ là cơ sở của $P_2[x]$ khi S độc lập tuyến tính.

Bài tập 1:

<u>Giải:</u> (Tiếp)

Lập A là ma trận tọa độ theo hàng của v_1, v_2, v_3

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & -m & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -m \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -m+1 \end{bmatrix} = B$$

Hệ S độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow r(A) = 3 \Leftrightarrow r(B) = 3 \Leftrightarrow m \neq 1$

Vậy với $m \neq 1$ thì hệ S là một cơ sở của $P_2[x]$

Bài tập 2: Trong M_2, cho các vecto

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, u_4 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & m \end{bmatrix}$$

Tìm m để hệ $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ là một cơ sở của M_2

Giải:

Hệ S có số vecto là $4 = \dim(M_2)$

$\Rightarrow S$ là cơ sở của M_2 khi S độc lập tuyến tính.

Lập A là ma trận tọa độ theo hàng của u_1, u_2, u_3, u_4.

Bài tập 2:

Giải: (Tiếp)

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 4 & m\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 2 & -3\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 5 & 4 & m-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 2 & -3\\ 0 & 5 & 4 & m-4\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -1 & m-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & m-1\end{bmatrix}=B$$

$$\boxed{m\neq 1}$$

Dạng bài tập 7: Tìm hạng của một hệ vecto

➢ ***Bài toán:*** Cho hệ vecto $S = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$

→ Tìm hạng của hệ vecto S (Ký hiệu $r(S)$)?

➢ ***Phương pháp giải:***

- ***B1***: Lập A là ma trận tọa độ theo hàng của các vecto có trong hệ S.
- ***B2:*** Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp đưa A về dạng bậc thang.
- ***B3***: Kết luận $r(S) = r(A)$

Ví dụ: Tìm hạng của hệ vecto $S = \{(-1,3,4); (1,5,-1); (1,3,2)\}$ trong R^3

Giải:
Lập A là ma trận tọa độ theo hàng của hệ vecto S

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow r(S) = r(A) = 3$$

❖ ***Đặc biệt:***

- $\{(1,0,0,\ldots,0);(0,1,0,\ldots 0);(0,0,1,\ldots,0)\}$ là cơ sở chính tắc của R^n

- $\{1;x;x^2;\ldots;x^n\}$ là cơ sở chính tắc của $P_n[x]$

- $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix};\ldots;\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ là cơ sở chính tắc của $M_{m\times n}$

VI. Tọa độ

- Cho không gian vecto V có một cơ sở $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ và vecto $u \in V$, thì bộ nghiệm $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ của hệ thức $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n\, v_n = u$ được gọi là tọa độ của vecto u trong cơ sở S.

- ***Ký hiệu:*** $[u]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

Ví dụ 1: Trong R^3 có một cơ sở $S = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,2), v_3 = (1,2,3)\}$ tìm tọa độ của vecto $x = (6,9,14)$ trong cơ sở S.

<u>Giải:</u>

Xét $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3\, v_3 = x \Leftrightarrow c_1(1,1,1) + c_2(1,1,2) + c_3\,(1,2,3) = (6,9,14)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 6 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 = 9 \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \\ c_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow [x]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 2: Trong không gian M_2 có một cơ sở

$$E = \left\{e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Tìm tọa độ của $u = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ trong cơ sở E

Giải:

Đáp số: $[u]_E = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ví dụ 3: Trong không gian $P_3[x]$, có một cơ sở

$$B = \{u_1 = 1, u_2 = 1 + x, u_3 = x + x^2, u_4 = x^2 + x^3\}.$$

Tìm tọa độ của vecto u biết $[u]_B = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Giải:

$$u = -4u_1 + 6u_2 - 3u_3 + 2u_4 = 2 + 3x - x^2 + 2x^3$$

VII. Bài toán tìm số chiều và một cơ sở của không gian vecto con

1. **Dạng 1:** KGVT con V sinh ra bởi hệ vecto S
2. **Dạng 2:** KGVT con $V_1 + V_2$
3. **Dạng 3:** KGVT con $V_1 \cap V_2$
4. **Dạng 4:** Không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất

1. *Dạng 1: Tìm số chiều và cơ sở của KGVT con V sinh ra bởi hệ vecto S*

➢ ***Bài toán:*** Cho hệ vecto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, tìm số chiều và một cơ sở của không gian vecto con V sinh ra bởi hệ S $(V = span\{v_1, v_1, \ldots, v_n\})$

➢ ***Phương pháp giải:***

- ***B1:*** Lập A là ma trận tọa độ theo hàng của các vecto $v_1, v_2, \ldots, v_n$
- ***B2:*** Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng đưa A về dạng bậc thang.
- ***B3:*** Kết luận $\dim V =$ Số dòng khác 0 của ma trận bậc thang và một cơ sở của V là hệ gồm các vecto được rút ra từ các dòng khác 0 của A

VII. Bài toán tìm số chiều và một cơ sở của không gian vecto con

Bài tập 1: Tìm cơ sở và số chiều của KGVT con sinh bởi hệ vecto sau: $\{v_1 = -1 + 2x^2; v_2 = 3 + x - x^2; v_3 = 5 + 2x\}$ trong $P_2[x]$.

Giải:

$V = span\{v_1, v_2, v_3\}$

Xét A là ma trận tọa độ theo hàng của v_1, v_2, v_3

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r(A) = 2 \Rightarrow \dim(V) = 2$, một cơ sở của V là $\{-1 + 2x^2; x + 5x^2\}$

Bài tập 2: Tìm cơ sở và số chiều của KGVT sinh bởi hệ vecto sau:

$v_1 = (1,1,2,-1), v_2 = (1,2,1,1), v_3 = (3,4,5,-1)$ trong R^4.

Giải:

$V = span\{v_1, v_2, v_3\}$

Xét A là ma trận tọa độ theo hàng của v_1, v_2, v_3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r(A) = 2 \Rightarrow \dim(V) = 2$, một cơ sở của V là $\{(1,1,2,-1); (0,1,-1,2)\}$

Bài tập 3: Tìm cơ sở và số chiều của KGVT con sinh bởi hệ vecto

$u_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, u_4 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ trong M_2

Bài tập 3:

$V = span\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

Xét A là ma trận tọa độ theo hàng của u_1, u_2, u_3, u_4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\dim V = r(A) = 4$

Một cơ sở của V là $\left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ hay $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

2) Dạng 2: Tìm số chiều và cơ sở của KGVT con $\boldsymbol{V_1 + V_2}$

➢ ***Bài toán:***

Cho hai hệ vecto $V_1 = span\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, V_2 = span\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

→ Tìm số chiều của không gian $V_1 + V_2$

Với $V_1 + V_2 = \{x = x_1 + x_2 | x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}$

2) Dạng 2: Tìm số chiều và cơ sở của KGVT con $V_1 + V_2$

➢ ***Phương pháp giải:***

Với $\forall x \in V_1 + V_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + x_2 \\ x_1 \in V_1, x_2 \in V_2 \end{cases}$

Do $\begin{cases} x_1 \in V_1 \\ x_2 \in V_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \\ x_2 = b_1u_1 + b_2u_2 + \cdots + b_nu_n \end{cases}$

$\Rightarrow x = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n + b_1u_1 + b_2u_2 + \cdots + b_nu_n$

Dễ thấy x là tổ hợp tuyến tính của hệ $\{v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_n\}$

Vậy $\boxed{V_1 + V_2 = span\{v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_n\}}$ $\Rightarrow$ Quay về ***Dạng 1.***

Bài tập 1: Trong không gian $P_3[x]$ cho các vecto

$v_1 = 1 - x + x^2, v_2 = x + x^2 + x^3, v_3 = 1 + x + 2x^2 + x^3, v_4 = 2 - x + 2x^2.$
Đặt $V_1 = span\{v_1, v_2\}, V_2 = span\{v_3, v_4\}.$

Xác định số chiều và 1 cơ sở của $V_1 + V_2$.

Giải:

Với $\forall x \in V_1 + V_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + x_2 \\ x_1 \in V_1, x_2 \in V_2 \end{cases} \Rightarrow x = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4.$

$\Rightarrow V_1 + V_2 = span\{v_1, v_2, v_3, v_4\}.$

Bài tập 1:

Giải: (Tiếp)

Xét A là ma trận tọa độ theo hàng của v_1, v_2, v_3, v_4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \dim(V_1 + V_2) = r(A) = 3$

Một cơ sở của $V_1 + V_2$ là $\{1 - x + x^2, x + x^2 + x^3, -x^2 - x^3\}$

Bài tập 2: (Cuối kỳ 20201) Trong R^4 cho các vecto

$v_1 = (2,1,-1,0), v_2 = (1,2,1,1), v_3 = (-1,1,2,1). v_4 = (1,-2,-4,-2)$

a) Vecto v_4 có thuộc $Span\{v_1, v_2, v_3\}$ không? (**Đáp số:** Không)

b) Đặt $U = span\{v_1, v_2\}, V = span\{v_3, v_4\}$. Tìm số chiều và một cơ sở của không gian con $U + V$.

(**Đáp số:** $\dim(U + V) = 3$, một cơ sở là $\{v_1, v_2, v_4\}$)

3) Dạng 3: Tìm số chiều và cơ sở của KGVT con $\boldsymbol{V_1 \cap V_2}$

➢ ***Bài toán:***

Cho hai hệ vecto $V_1 = span\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, V_2 = span\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

→ Tìm số chiều của không gian $V_1 \cap V_2$

Với $V_1 \cap V_2 = \{x | x \in V_1, x \in V_2\}$

3. Dạng 3: Tìm số chiều và một cơ sở của không gian $V_1 \cap V_2$

Với $\forall y \in V_1 \cap V_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y \in V_1 \\ y \in V_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n (1) \\ y = b_1u_1 + b_2u_2 + \dots + b_nu_n (2) \end{cases}$

Lấy $(1) - (2)$, ta thu được:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n - b_1u_1 - b_2u_2 - \dots - b_nu_n = 0$$

Đồng nhất hệ số và giải hệ ⇒ Tìm được $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$

Thay vào (1) hoặc $(2) \Rightarrow y = \dots \Rightarrow V_1 \cap V_2 = span\{\dots\}$ ⇒ Quay về ***Dạng 1.***

⇒ Số chiều và một cở sở của $V_1 \cap V_2$.

Bài tập 1: Trong $P_3[x]$ cho các vecto $v_1 = 1 + x^2 + x^3, v_2 = 2 + x - x^2$, $v_3 = 1 + 2x + x^2 + x^3, v_4 = 2 + 3x - x^2$. Đặt $V_1 = span\{v_1, v_2\}$, $V_2 = span\{v_3, v_4\}$. Xác định số chiều và 1 cơ sở của $V_1 \cap V_2$.

Giải:

Với $\forall y \in V_1 \cap V_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y \in V_1 = span\{v_1, v_2\} \\ y \in V_2 = span\{v_3, v_4\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = av_1 + bv_2 \\ y = cv_3 + dv_4 \end{cases}$

$\Rightarrow av_1 + bv_2 - cv_3 - dv_4 = 0$

Giải: (Tiếp)

$$av_1 + bv_2 - cv_3 - dv_4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b - c - 2d = 0 \\ b - 2c - 3d = 0 \\ a - b - c + d = 0 \\ a - c = 0 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Đặt $d = t \Rightarrow \begin{cases} a = -t \\ b = t \\ c = -t \\ d = t \end{cases} \Rightarrow (a, b, c, d) = (-t, t, -t, t), t \in R$

VII. Bài toán tìm số chiều và một cơ sở của không gian vecto con

Giải: (Tiếp)

Thay $a = -t, b = t$ vào $y = av_1 + bv_2$

$\Rightarrow y = -t(1 + x^2 + x^3) + t(2 + x - x^2) = t(1 + x - 2x^2 - x^3)$

$\Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{y = t(1 + x - 2x^2 - x^3) | t \in R\}$

$\Rightarrow V_1 \cap V_2 = span\{1 + x - 2x^2 - x^3\}$

Dễ thấy hệ $\{1 + x - 2x^2 - x^3\}$ độc lập tuyến tính.

Vậy $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$, một cơ sở của $V_1 \cap V_2$ là $\{1 + x - 2x^2 - x^3\}$.

Bài tập 2: (Cuối kỳ 20201) Trong R^4 cho các vecto

$$v_1 = (2,1,1,2), v_2 = (-1,0,3,1), v_3 = (1,1,4,2), v_4 = (2,2,8,5)$$

Đặt $U = span\{v_1, v_2\}, V = span\{v_3, v_4\}$

a) Tìm hạng của hệ vecto $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ (**Đáp số:** $r(S) = 3$)

b) Tìm số chiều và một cơ sở của không gian con $U \cap V$

(**Đáp số:** $\dim(U \cap V) = 1$ và một cơ sở là $\{(1,1,4,3)\}$)

4. Dạng 4: Tìm số chiều và cơ sở của không gian nghiệm hệ phương trình trình thuần nhất:

- Gọi S là tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, A là ma trận hệ số khi đó S chính là một không gian vecto con của không gian vecto R^n và số chiều của S được xác định bởi công thức

$$\boxed{\dim(S) = \text{số ẩn} - r(A)}$$

Bài tập 1: Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ sau

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Bài tập 2: Tìm a, b để không gian nghiệm của hệ sau có số chiều là 1:

$$\begin{cases} bx + 3y + z = 0 \\ (1 + 2b)x + (a + 5)y + 2z = 0 \\ (2b - 1)x + (a + 2)y + z = 0 \end{cases}$$

Bài tập 1:

Giải:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$r(A) = r(\bar{A}) = 3 < 4 \Rightarrow$ Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào 1 tham số.

Hệ ban đầu $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

Bài tập 1:

Giải: (Tiếp)

Đặt $x_4 = t\ (t \in R) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = -t \\ x_3 = -2t \\ x_4 = t \end{cases} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_2) = t(-1, -1, -2,1)$

$\Rightarrow$ Không gian nghiệm của hệ $S = \{t(-1, -1, -2,1) | t \in R\}$.

$\Rightarrow S = span\{(-1, -1, -2,1)\}$.

Dễ thấy hệ $\{(-1, -1, -2,1)\}$ độc lập tuyến tính

$\Rightarrow$ Một cơ sở của S là $\{(-1, -1, -2,1)\}, \dim(S) = 1$.

Bài tập 2:

Giải:

Gọi S là không gian nghiệm của hệ. Để $\dim(S) = 1 \Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) = 2$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} b & 3 & 1 \\ 1+2b & a+5 & 2 \\ 2b-1 & a+2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & b \\ 2 & a+5 & 1+2b \\ 1 & a+2 & 2b-1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & b \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & b-2 \end{bmatrix}$$

Để $r(A) = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ 0 & b-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a-1)(b-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \end{array}\right.$

Vậy với $\left[\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \end{array}\right.$ thì không gian nghiệm của hệ sau có số chiều là 1.

Bài tập 3 (Cuối kỳ 20201): Ký hiệu Q là tập nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + px_3 + 5x_4 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + qx_4 = 0 \end{cases}$$

Với p, q là các tham số.

1. Chứng minh Q là không gian con của R^4
2. Tìm p, q để $\dim Q = 1$ (Đáp án: $q \neq 6, p \in R$)

VIII. Bài toán đổi cơ sở:

➢ ***Bài toán:***

Trong không gian vecto n chiều V, giả sử V có 2 cơ sở $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ và $S' = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$, tọa độ của vecto u trong cơ sở S, kí hiệu $[u]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$.

Vậy từ $[u]_S$ chúng ta có thể tìm ra được $[u]_{S'}$ không? Liệu giữa $[u]_S$ và $[u]_{S'}$ có mối quan hệ nào không?

VIII. Bài toán đổi cơ sở:

➢ ***Cách làm:***

- Để tìm được $[u]_{S'}$ thông qua $[u]_S$ chúng ta sử dụng công thức liên hệ:

$$\boxed{[u]_S = P.[u]_{S'}}$$

Với P được gọi là ma trận chuyển từ cơ sở S sang cơ sở S'

$$\boxed{P = \left[[v'_1]_S[v'_2]_S \dots [v'_n]_S\right]}$$

- Nếu P là ma trận chuyển từ cơ sở S sang S' thì P^{-1} là ma trận chuyển từ cơ sở S' sang S.

VIII. Bài toán đổi cơ sở:

Bài tập 1: Trong không gian R^3, tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở

$B_1 = \{u_1 = (1,-1,2), u_2 = (1,0,-2), u_3 = (1,-1,1)\}$ sang cơ sở

$B_2 = \{v_1 = (2,-1,3), v_2 = (3,2,1), v_3 = (-2,1,2)\}$

Bài tập 2: (Đề thi Cuối kỳ K58) Trong không gian $P_2[x]$ cho cơ sở chính tắc $E = \{1; x; x^2\}$ và cơ sở $S = \{1,4 - x, (2 + x)^2\}$. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ E sang S và ma trận chuyển cơ sở từ S sang E

VIII. Bài toán đổi cơ sở:

Bài tập 1: $B_1 = \{u_1 = (1,-1,2), u_2 = (1,0,-2), u_3 = (1,-1,1)\}$

$$B_2 = \{v_1 = (2,-1,3), v_2 = (3,2,1), v_3 = (-2,1,2)\}$$

<u>**Giải:**</u>

Ma trận chuyển cơ sở $P = \left[[v_1]_{B_1}[v_2]_{B_1}[v_3]_{B_1}\right]$

$v_1 = au_1 + bu_2 + cu_3 \Leftrightarrow (2,-1,3) = a(1,-1,2) + b(1,0,-2) + c(1,-1,1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 2 \\ -a - c = -1 \\ 2a - 2b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow [v_1]_{B_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Bài tập 1:

<u>**Giải:**</u> **(Tiếp)**

$v_2 = au_1 + bu_2 + cu_3 \Leftrightarrow (3,2,1) = a(1,-1,2) + b(1,0,-2) + c(1,-1,1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=3 \\ -a-c=2 \\ 2a-2b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=13 \\ b=5 \\ c=-15 \end{cases} \Rightarrow [v_2]_{B_1} = \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \\ -15 \end{bmatrix}$$

$v_3 = au_1 + bu_2 + cu_3 \Leftrightarrow (-2,1,2) = a(1,-1,2) + b(1,0,-2) + c(1,-1,1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=-2 \\ -a-c=1 \\ 2a-2b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-2 \end{cases} \Rightarrow [v_3]_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

VIII. Bài toán đổi cơ sở:

Bài tập 1:

<u>Giải:</u> (Tiếp)

Ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở từ B_1 sang B_2

$$P = \left[[v_1]_{B_1}[v_2]_{B_1}[v_3]_{B_1}\right] = \begin{bmatrix} 4 & 13 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ -3 & -15 & -2 \end{bmatrix}$$

Bài tập 2: $E = \{1; x; x^2\}$, $S = \{1, 4 - x, (2 + x)^2\}$

<u>Giải:</u>

Ma trận chuyển cơ sở từ $E \to S$:

$$P = \left[[1]_E \; [4 - x]_E \; [(2 + x)^2]_E \right] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận chuyển cơ sở từ $S \to E$: $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -20 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

VIII. Bài toán đổi cơ sở:

❖ ***Đặc biệt:***

Cách viết nhanh ma trận chuyển cơ sở P từ cơ sở chính tắc $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ sang một cơ sở bất kì $S = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ là:

$$\boxed{P = [[u_1] \quad [u_2] \quad [u_3] \quad \dots \quad [u_n]]}$$

Với $[u_1], [u_2], [u_3], \dots, [u_n]$ là tọa độ của các vecto $u_1, u_2, u_3, \dots u_n$ viết theo cột.

HUST

hust.edu.vn fb.com/dhbkhn

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

HUST

hust.edu.vn   fb.com/dhbkhn

THANK YOU !